Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III-A – Módulo 13

Aula 24 – Teorema de Gauss

Objetivo

- Estudar um teorema famoso que permite calcular fluxos através de superfícies fechadas: o teorema de Gauss.

O Teorema de Gauss

O curso de Cálculo III-A, contém alguns teoremas fascinantes como o teorema de Green, o teorema de Stokes e o teorema de Gauss. Nesse módulo apresentamos o famoso teorema de Gauss ou teorema da Divergência. No próximo módulo, apresentaremos o também famoso teorema de Stokes.

O teorema de Gauss estabelece uma relação entre uma integral tripla, numa região sólida W de $\mathbb{R}^3$, com uma integral de superfície na sua fronteira. Esse teorema é um instrumento poderoso para os modelos matemáticos que descrevem alguns fenômenos físicos como fluxos de fluidos, fluxos de campos elétricos ou magnéticos e fluxos de calor.

Agora, enunciaremos o teorema da Divergência ou de Gauss.

Teorema de Gauss: Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido, cuja fronteira $\partial W = S$ está orientada positivamente com $\overrightarrow{n}$ exterior a W. Seja $\overrightarrow{F}$ um campo vetorial de classe C^1 em um aberto U contendo W. Então,

$$\iint_{S=\partial W} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_{W} \operatorname{div} \overrightarrow{F}\, dxdydz\,.$$

Para enunciar os teoremas de Gauss e de Stokes utilizaremos conceitos definidos na Aula 14 – Campos Vetoriais: divergente e rotacional. Lembrando aqui que:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

e

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \overrightarrow{\mathbf{k}}\,.$$

Exemplo 1

Verifique o teorema de Gauss para $\overrightarrow{F}(x,y,z) = xz\ \overrightarrow{\mathbf{i}} + yz\ \overrightarrow{\mathbf{j}} + z^2\ \overrightarrow{\mathbf{k}}$, calculando as duas integrais do enunciado, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $\vec{n}$ é a normal unitária exterior a S.

Solução:

O vetor unitário normal exterior à esfera é definido por $\vec{n} = \frac{(x,y,z)}{a}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\ dS &= \iint_S (xz, yz, z^2)\cdot\tfrac{(x,y,z)}{a}\ dS \\
&= \frac{1}{a}\iint_S \left(x^2z + y^2z + z^3\right)\ dS \\
&= \frac{1}{a}\iint_S z\left(x^2+y^2+z^2\right)\ dS \\
&= \frac{a^2}{a}\iint_S z\ dS \\
&= a\iint_S z\ dS\,.
\end{aligned}$$

Parametrizando S, temos $\varphi(\phi,\theta) = (a\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\phi)$, com $D: 0\le\phi\le\pi$ e $0\le\theta\le 2\pi$. Temos, também, que $dS = a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta$. Então,

$$\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\ dS &= a\iint_D (a\cos\phi)\left(a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\right)\ d\phi\,d\theta \\
&= a^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\ d\phi\,d\theta \\
&= a^4\int_0^{2\pi}\left.\frac{\mathrm{sen}^2\,\phi}{2}\right|_0^{\pi} d\theta \\
&= a^4\int_0^{2\pi} 0\ d\theta \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z + z + 2z = 4z$$

e, então,

$$\begin{aligned}\iiint_W \operatorname{div}\overrightarrow{F}\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\pi} 4\rho^3\cos\phi\,\operatorname{sen}\phi\; d\phi\, d\rho\, d\theta \\ &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\left[\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\right]_0^{\pi} d\rho\; d\theta \\ &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\cdot 0\, d\rho\, d\theta \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

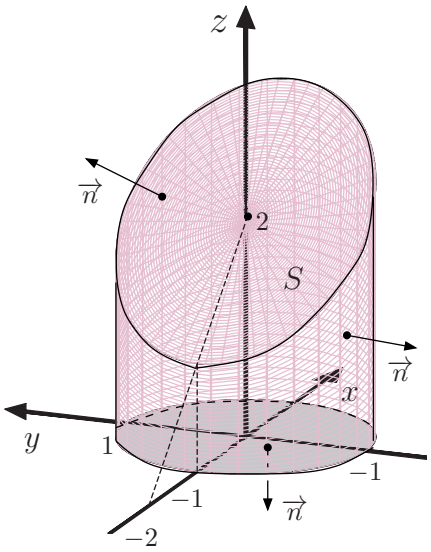
O teorema de Gauss está, portanto, verificado.

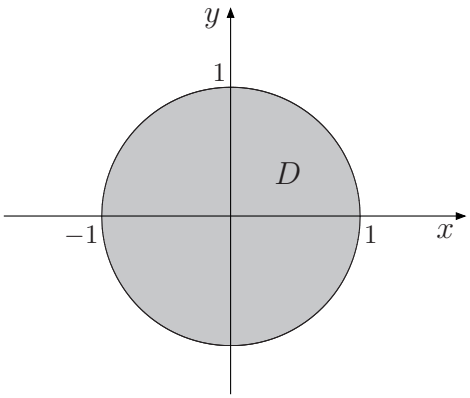
Exemplo 2

Calcule $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\; dS$, onde $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+ye^z, y+ze^x, z^2+xe^y)$, S é a fronteira do sólido interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, entre os planos $z=0$ e $z=x+2$ e $\vec{n}$ a normal exterior a S.

Solução:

O esboço de S é:





Seja W o sólido limitado por S. Pelo teorema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_W \operatorname{div}\overrightarrow{F}\,dV &= \iiint_W (1+1+2z)\,dV \\
&= 2\iint_D \int_0^{x+2} (1+z)\,dz\,dx\,dy \\
&= 2\iint_D \left[z+\tfrac{z^2}{2}\right]_0^{x+2} dx\,dy \\
&= 2\iint_D \left[x+2+\tfrac{(x+2)^2}{2}\right] dx\,dy \\
&= \iint_D (6x+8+x^2)\,dx\,dy \\
&= \underbrace{6\iint_D x\,dx\,dy}_{=\,0} + \underbrace{8\,A(D)}_{8\pi} + \iint_D x^2\,dx\,dy\,.
\end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta = \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\theta+\tfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \tfrac{\pi}{4}\,.$$

Logo,

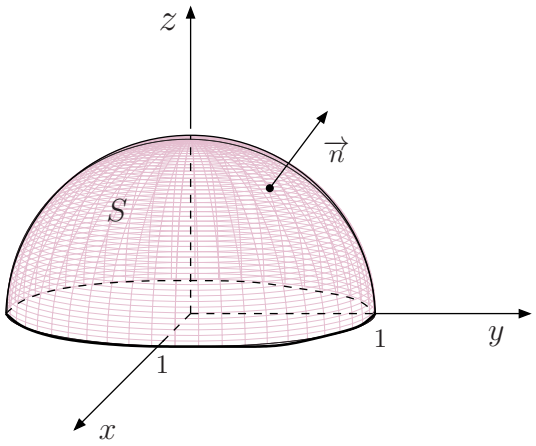
$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,dS = 8\pi+\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{33\pi}{4}\,.$$

Exemplo 3

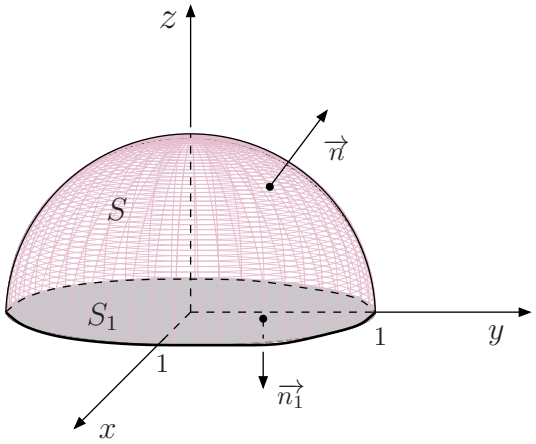
Calcule $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,dS$, sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^3\overrightarrow{\mathbf{i}} + y^3\overrightarrow{\mathbf{j}} + z^3\overrightarrow{\mathbf{k}}$ e $\vec{n}$ a orientação normal exterior a $S: x^2+y^2+z^2=1$, com $z\geq 0$.

Solução:

O esboço de S (aberta) é:



Seja $\overline{S} = S \cup S_1$, onde $S_1 : z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, com $\vec{n}_1 = -\vec{k}$.



Seja W o sólido limitado pela superfície fechada $\overline{S}$. Como estamos nas condições do teorema de Gauss, temos:

$$\iint\limits_{S} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS + \iint\limits_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1\, dS = \iiint\limits_{W} \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iiint\limits_{W} 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dV\,.$$

Passando para coordenadas esféricas, temos $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$ e $W_{\rho\phi\theta} : 0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Então,

$$\begin{aligned}
\iiint_W 3\,(x^2+y^2+z^2)\;dV &= 3\iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^2\cdot\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho^4\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\theta\,d\rho\,d\phi \\
&= 6\pi\int_0^{\pi/2}\int_0^1\rho^4\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi \\
&= \frac{6\pi}{5}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi \\
&= \frac{6\pi}{5}\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{6\pi}{5}\,.
\end{aligned}$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_{S_1}\overrightarrow{F}\cdot\vec{n}_1\,dS$

Temos

$$\iint_{S_1}\overrightarrow{F}\cdot\vec{n}_1\,dS=\iint_{S_1}(x^3,y^3,0)\cdot(0,0,-1)\,dS=\iint_{S_1}0\,dS=0\,.$$

Logo,

$$\iint_S\overrightarrow{F}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{6\pi}{5}\,.$$

Exercício 1: Verifique o teorema de Gauss calculando a integral de superfície e a integral tripla para o campo $\vec{F}(x,y,z)=2x\,\vec{\mathbf{i}}+2y\,\vec{\mathbf{j}}+z^2\,\vec{\mathbf{k}}$ e S é a superfície da seguinte região:

$$W=\left\{(x,y,z);\;x^2+y^2\le 1\,,\,0\le z\le 1\right\}\,.$$

Exercício 2: Aplique o teorema da divergência para obter o fluxo do campo $\vec{F}$ através de S, orientada positivamente:

a) $\vec{F}(x,y,z)=(x^2+y^2)\,\vec{\mathbf{i}}+(y^2-2xy)\,\vec{\mathbf{j}}+(4z-2yz)\vec{\mathbf{k}}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelo cone $x=\sqrt{y^2+z^2}$ e pelo plano $x=3$.

b) $\vec{F}(x,y,z)=(x^3+y\,\mathrm{sen}\,z)\,\vec{\mathbf{i}}+(y^3+z\,\mathrm{sen}\,x)\,\vec{\mathbf{j}}+z^3\vec{\mathbf{k}}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelos hemisférios $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ e pelo plano $z=0$.

c) $\vec{F}(x,y,z)=(xy^2+\cos z)\,\vec{\mathbf{i}}+(x^2y+\mathrm{sen}\,z)\,\vec{\mathbf{j}}+e^y\vec{\mathbf{k}}$, onde S é a superfície do sólido W limitado pelo paraboloide $z=x^2+y^2$ e pelo plano $z=4$.

Exercício 3: Fechando, de uma forma adequada, as superfícies abertas dadas e utilizando o teorema de Gauss, calcule o fluxo do campo $\vec{F}$ através de S, com $\vec{n}$ exterior à superfície fechada

a) $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,2z)$, onde S é a superfície do paralelepípedo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$, exceto a face superior;

b) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, onde $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com $z \leq 0$;

c) $\vec{F}(x,y,z) = z\,\mathrm{arctg}(y^2)\ \vec{\mathbf{i}} + z^3 \ln(x^2+1)\ \vec{\mathbf{j}} + z\ \vec{\mathbf{k}}$, onde $S : z = 2 - x^2 - y^2$, com $1 \leq z \leq 2$.

Exercício 4: Calcule $\iint_S (\mathrm{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n}\ dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = (e^x - y)\ \vec{\mathbf{i}} + (xz + y^2)\ \vec{\mathbf{j}} + 2yz\ \vec{\mathbf{k}}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, com $z \leq 1$, orientada com $\vec{n}$ exterior.

Exercício 5: Seja W a região limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, o plano $y + z = 2$ e os planos coordenados $z = 0$ e $y = 0$. Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = (x + e^{-y}\,\mathrm{sen}\,z)\ \vec{\mathbf{i}} + \\ + (y + \mathrm{arctg}\,z)\ \vec{\mathbf{j}} + (\mathrm{sen}\,x + \cos y)\ \vec{\mathbf{k}}$ através da superfície S de W com normal $\vec{n}$ exterior à W.